*Anales de la Real Academia de Doctores de España*
*Volumen 7, pp. 259-289, 2003*

# UNA REVISIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS TRUNCADAS EN LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

FCO. JAVIER DÍAZ-LLANOS Y SAINZ-CALLEJA,
JUAN IGNACIO DOMÍNGUEZ MARTÍNEZ
y CARMEN CERMEÑO CARRASCO

**Resumen**: El objetivo de este artículo es doble. Por un lado, :presentar, no sólo el desarrollo para encontrar esperanzas matemáticas y varianzas de variables aleatorias continuas truncadas que apenas se contemplan en la bibliografía consultada sino también, mostrar un conjunto representativo de variables aleatorias truncadas donde, en algunas de ellas, sí se contemplan —aunque de diferente manera—. En segundo lugar, aplicar los resultados obtenidos, a problemas prácticos asociados —preferentemente— al **control estadístico de la calidad.**

## BREVE CONSIDERACIÓN SOBRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL (LEY NORMAL)

Sería muy conveniente recordar que la Distribución Normal(Ley Normal) tan sólo aparece como Ley de Laplace-Gauss en algunos libros de texto y de ejercicios escritos en francés.

Tal circunstancia no nos parece en modo alguna oportuna, ya que basta que el lector se documente un poco para darse cuenta de que, en su origen, la Distribución Normal (Ley Normal), está basada en los trabajos practicados por Jacques Bernoulli(1654-1705); y además, la Ley Normal fue introducida por Carl Friedrich Gauss(1777-1855) para justificar el método de mínimos cuadrados que Ledonhard Euler (1707-1783) había introducido en el siglo XVIII (Inégalités du mouvement de Saturne et de Júpiter, Prix de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 1747).

Sin duda, el Marqués de Laplace fue el primero en evaluar explicitamente la integral de Euler, en 1774. Por tanto, resulta que lo correcto es denominarla Ley de Laplace-Gauss y no de otra forma.

No obstante, una vez fallecidos Gauss y Laplace, Karl Pearson aprovechó tal ocasión para despersonalizar indebidamente la Ley de Laplace-Gauss en 1983, llamándola Distribución Normal.

A partir de entonces, se impulsó tal denominación por la prepotencia del mundo anglosajón en los ámbitos científicos y políticos.

Pese a todo, seis años más tarde el físico francés, Kramp, fue quien elaboró las primeras Tablas de la Distribución Normal.

En definitiva, en los manuales y en los artículos escritos en inglés aparece como Distribución Normal, mientras que los autores franceses continúan llamándola Ley Normal y tan sólo una minoría de éstos ha optado por denominarla Ley de Laplace-Gauss, que a nuestro juicio es la denominación más idónea y que hace justicia a los dos matemáticos, físicos y astrónomos que intervinieron más en su elaboración.

## BREVES CONSIDERACIONES SOBRE LA NOMENCLATURA UTILIZADA EN ESTE ARTÍCULO

A nuestro entender, algunos de los matemáticos más relevantes de Francia y de EE.UU. (entre los que se encuentran Philippe Tassi, Director de Médiametrie y profesor de ENSPM y ENSAE; y Edward J.Dudewicz y Satya N.Mishra, profesores de las Universidades de Syracure y de South Alabama, respectivamente) utilizan la **función indicadora** para expresar la función de densidad de las variables aleatorias reales continuas.

Esta forma de expresión nos parece más simplificada que la tradicional, pues en lugar de poner:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

donde a y b son dos números reales, $a<b$

aconsejamos poner:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$$

*(según Philippe Tassi)*

o bien,

en donde

designa la **función indicadora** en el soporte [a,b] tal que:

$$1_{[a,b]}(x) = 1 \; si \; x \in [a,b] \;\; y \;\; 1_{[a,b]}(x) = 0 \; si \; x \notin [a,b]$$

Otra notación que introducimos en este artículo es la siguiente:

Por otra parte, en los libros y artículos de Estadística escritos en inglés no suele emplearse esta notación:

$$X \hookrightarrow W\left(0,\theta,1\right)$$

Esto significa que la variable aleatoria X sigue la Ley de Weibull de parámetros:

Una variable aletoria que sigue la Ley de Weibull se llama variable de Weibull. A título de referencia esta notación se contempla en (5,6).

Y, finalmente, el lector podrá constatar que en lugar de adoptar la denominación de **Modelo** utilizamos la de **Ley**, ya que nos parece más correcta. Al igual que resulta más idóneo decir **Teorema del Límite Central** que **Teorema Central del Límite**. Esta breve reflexión puede contemplarse en (1).

$\left(0,\theta,1\right)$

$P_X(T) = \int f(x)dx$

*R: conjunto de los números reales.*

$R_+$ *: conjunto de los números reales positivos.*

$R_+^*$ *: conjunto de los números reales positivos excluido el 0.*

## INTRODUCCIÓN

En primer lugar, vamos a definir de una maneral general el concepto de truncamiento y los tres caso posibles que hemos considerado a lo largo del artículo.

De una manera general, si X es una v.a. continua con densidad f y función de distribución F en el soporte R, entonces la ley de probabilidad de la v.a.

$$Y = \{ \; X \,|\, X \in T \; \} \; con \; soporte \; T \subset R$$

, se llama distribución truncada. Además la cantidad de «masa» de modelo original con el que se va a trabajar en el nuevo modelo truncado,

, se llama grado de truncamiento. Los truncamientos más interesantes desde el punto de vista práctico son:

$$Y_1 = \{ X \mid X \le k \},\, Y_2 = \{ X \mid X > k \}$$
$$e\, Y_3 = \{ X \mid k_1 < X \le k_2 \}$$

cuyos grados de truncamiento son, respectivamente,

$$F(k),\, R(k) = 1 - F(k) \text{ y } F(k_2) - F(k_1) = R(k_1) - R(k_2)$$

, donde R(x) = 1- F(x) es la función de fiabilidad (o supervivencia)

Las medias y varianzas asociadas a estas v.a. truncadas se denominan, respectivamente, submedias y subvarianzas.

El análisis de los truncamientos unilaterales Y1 ye Y2 son de especial interés ya que es posible calcular las características de uno de ellos conociendo el del otro truncamiento. Las esperanzas matemáticas asociadas, que serán función de k (punto de truncamiento), son

$$E(Y_1) = E(\, X \mid X \le k \,) = \frac{1}{F(k)} \int_{-\infty}^{k} x\, f(x) dx$$

$$E(Y_2) = E(X \mid X > k\,) = \frac{1}{R(k)} \int_{k}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Despejando y sumando, obtenemos que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{k} x\, f(x)dx + \int_{k}^{\infty} x\, f(x)dx =$$
$$= F(k)\, E(X \mid X \le k) + R(k)\, E(X \mid X > k)$$

lo que significa que cualquiera que sea el punto de truncamiento k, la esperanza de la variable original se puede expresar como una mixtura y por tanto, conocida una de las esperanzas, por ejemplo

$$E(X \mid X \le k)$$

, la otra se obtiene simplemente por

$$E(X \mid X > k) = \frac{E(X) - F(k)\, E(X \mid X \le k)}{R(k)}$$

*o*

$$E(Y_2) = \frac{E(X) - F(k) E(Y_1)}{R(k)}$$

Para los truncamientos bilaterales y las varianzas se razona de igual modo.

En segundo lugar, nos concentraremos —«a posteriori»— en la evaluación de la necesidad del truncamiento, no sólo desde el punto de vista teórico sino sobre todo práctico, de las variables aleatorias continuas.

Es evidente, que cualquier fenómeno que observemos no se verifica en todo el soporte de definición de la variable aleatoria que lo represente y, por tanto, se hace imprescindible la práctica del truncamiento de la variable a la izquierda, a la derecha o a la izquierda y a la derecha.

El truncamiento es aconsejable no sólo en estos casos, sino también cuando, al menos, las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias no están definidas en todo su soporte de definición.

Además, en ciertas situaciones, es necesario proceder al truncamiento de las variables aleatorias para poder estudiar ciertos problemas límites de la probabilidad. Por consiguiente, es conveniente proceder al truncamiento de las variables aleatorias con el fin de que los resultados que obtengamos se aproximen lo máximo posible al proceso que deseamos controlar.

En concreto, entre las posibles variables aleatorias que no poseen esperanza matemática en todo su soporte de definición tan sólo haremos mención a una de ellas. Nos referimos a la distribución de Cauchy. Esta distribución presenta la particularidad de que tiene ciertas similitudes con la de Laplace-Gauss, en el sentido que se verifican entre ellas la siguiente relación:

$$\left[1 - F_{C(0,1)}(z)\right] \geq \left[1 - F_{LG(0,1)}(z)\right] \quad para\ z \geq 1$$

Esta relación —con otra nomenclatura— se encuentra explicada de forma didáctica en (2,4 y 8).

Hacemos alusión a esta variable, no sólo por la similitud con la variable de Laplace-Gauss sino también, por el hecho de que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) junto con Carl Friedrich Gauss (1777-1855) están considerados como los mejores matemáticos de su época.

Finalmente, hemos de recordar que, para resolver ciertos problemas de naturaleza geométrica tenemos que hacer uso de la variable de Cauchy. Estos problemas se encuentran en (2 y 4)

Entre la multitud de libros y apuntes de cátedra que —sin duda— se han escrito durante un período dilatado de tiempo sobre el cálculo de la esperanza matemática y varianza de las variables aleatorias truncadas y su aplicación en las ciencias experimentales, nosotros, tan sólo hemos considerado un período de tiempo truncado a la izquierda y a la derecha que va desde el año 1964 al 2001, ambos inclusive. En éste período de tiempo, hemos consultado un número —a nuestro juicio— representativo de 10 libros de texto y dos apuntes de cátedra que tratan algún punto del problema del truncamiento de variables aleatorias.

Al final del artículo, aparecen referenciados en orden cronológico no sólo los libros de cálculo de probabilidades que hemos utlilizado, sino también los libros de texto y apuntes de cátedra en los cuales se hace referencia a las variables aleatorias truncadas.

## PRESENTACIÓN DEL SUBCONJUNTO DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS QUE VAMOS A SOMETER AL PROCESO DE TRUNCAMIENTO

En este artículo, hemos seleccionado para someterlas al proceso de truncamiento un subconjunto de variables aleatorias continuas que tienes interés no sólo en los **desarrollos teóricos**, sino también, en la **aplicación práctica** del cálculo de probabilidades; en concreto al control estadístico de la calidad y a la fiabilidad de sistemas.

Entre las **Leyes de probabilidad selecionadas: Cauchy**, **Laplace-Gauss (Normal), log-Laplace-Gauss (log-Normal), log-Laplace-Gauss generalizada (log-Normal generalizada)**,**Weibull** y finalmente un caso particular de la de **Weibull: Rayleigh**, sólo la de **Cauchy** tiene interés teórico.

Antes de proceder al cálculo de la esperanza matemática y de la varianza de las variables aleatorias truncadas, vamos a presentarlas brevemente en todo su campo de definición y a exponer sus esperanzas matemáticas y varianzas, omitiendo su demostración ya que, se encuentra en cualquier curso de cálculo de probabilidades.

## I. DISTRIBUCIÓN DE CAUCHY

La introducimos de dos formas

i) La variable aleatoria S sigue una Ley de Cauchy:

si S = tg X en donde X es una variable aleatoria real rectangular definida en el soporte

**ii)** Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que siguen la ley de Laplace-Gauss de parámetros 0 y 1.

$$X \hookrightarrow LG(0,1) \quad Y \hookrightarrow LG(0,1)$$

Entonces

sigue la Ley de Cauchy

$$S \hookrightarrow C(0,1)$$

A partir de un sencillo cambio de variable, la función de densidad de S es:

Mediante una transformación lineal obtenemos la distribución generalizada

$$V = \theta + \lambda S \quad (\theta \in R, \lambda \in R_+^*)$$

$$V \hookrightarrow C(\theta, \lambda)$$

**Cálculo de los momentos ordinarios (k ≥1)**

Cálculo de los momentos, respecto al origen de orden k

$$f_S(s) = \frac{1}{\pi\left(1+s^2\right)} 1_R(s)$$

$$f_V(v) = \frac{1}{\lambda\pi\left(1+\left(\frac{v-\theta}{\lambda}\right)^2\right)} 1_R(v)$$

$$E\left(V^k\right) = \int v^k f_V(v)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} 1_R(v) \frac{v^k}{\lambda\pi\left(1+\left(\frac{v-\theta}{\lambda}\right)^2\right)} dv$$

Observamos que las integrales que hay que resolver son indefinidas. Por consiguiente, la variable de Cauchy carece de esperanza matemática y de varianza.

## II. DISTRIBUCIÓN DE LAPLACE-GAUSS (LEY NORMAL)

Decimos que X sigue una ley Normal de parámetros,

$$\mu \text{ y } \sigma \,(\mu \in R, \sigma \in R_+^*)$$

si X es una variable aleatoria real absolutamente continua cuya función de densidad es:

$$f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} 1_R(x)$$

*La transformación lineal (tipificación)*

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

nos conduce, de forma elemental, a la función de densidad de la variable Y

Los momentos ordinarios generales, no son triviales de obtener, pero la media y la varianza, son conocidos y coinciden con los parámetros de la distribución.

$$E\left(X\right)=\mu \quad V\left(X\right)=\sigma^{2}$$

## III. DISTRIBUCIÓN LOG-LAPLACE-GAUSS (LEY LOG-NORMAL)

La variable aleatoria L sigue la Ley log-Normal si

en donde X es una variable Normal de parámetros

Mediante un simple cálculo se puede deducir su función de densidad siendo ésta la que mostramos a continuación:

**Cálculo de los momentos respecto al origen de orden k.**

Calculamos los momentos, respecto al origen de orden k, mediante la siguiente manera,

$$E\left(L^{k}\right)=\int_{0}^{+\infty} l^{k}\, f_{L}(l;\mu,\sigma)dl$$

*que para k=1 y k=2 obtenemos*

$$E\left(L\right)=e^{\mu+\frac{\sigma^{2}}{2}} \quad V\left(L\right)=e^{2\mu+\sigma^{2}}\left(e^{\sigma^{2}}-1\right)$$

Es fácil probar que

$$E\left(L^{k}\right)=e^{k\mu+\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}} \quad (k=1,2,3,...)$$

## IV. DISTRIBUCIÓN LOG-LAPLACE-GAUSS GENERALIZADA (LEY LOG-NORMAL GENERALIZADA)

La variable aleatoria G sigue la ley **log-Normal generalizada** si

$$G = e^{X} + g_o = L + g_o$$

en donde X es una variable Normal de parámetros

$$\mu \ y \ \sigma$$

Esta variable corresponde a una translación de la Ley convencional.

En consecuencia su densidad es:

$$f_G(g;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\left(g - g_o\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log_e(g-g_o)-\mu}{\sigma}\right)^2} 1_{[g_o,+\infty[}(g)$$

*Como G es una traslación de L, entonces su media queda trasladada y su varianza permanece invariante; por tanto :*

$$E(G) = E(L) + g_o \ \ y \ \ V(G) = V(L)$$

## V. DISTRIBUCIÓN DE WEIBULL GENERALIZADA

Decimos que la variable aleatoria X sigue la Ley Weibull generalizada a tres parámetros

$$\gamma, \theta, \delta \quad (\gamma \in R; \theta, \delta \in R_+^*)$$

si X es una variable aleatoria real absolutamente continua cuya función de densidad es:

$$f_X(x;\gamma,\theta,\delta) = \frac{\delta}{\theta}\left(\frac{x-\gamma}{\theta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\theta}\right)^{\delta}} 1_{[\gamma,+\infty[}(x)$$

Una adecuada integración por partes nos conduce a que la media y la varianza son:

$$E\left(X^k\right) = \int_{\gamma}^{+\infty} x^k \frac{\delta}{\theta}\left(\frac{x-\gamma}{\theta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\theta}\right)^{\delta}} dx$$

$$E(X) = \theta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + \gamma$$

$$V(X)=\theta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\delta}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^2\right]$$

**Casos particulares de la variable de Weibull a tres parámetros**

## VI. VARIABLE DE RAYLEIGH

Definición:

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que siguen la Ley de Laplace-Gauss (Nornal),

$$X \hookrightarrow LG\left(0,\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \quad e \quad Y \hookrightarrow LG\left(0,\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \quad (\theta \in R_+^*)$$

A partir de estas dos variables aleatorias construimos una nueva variable de la siguiente manera,

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

(que puede interpretarse como la «**distancia**» entre dos puntos del plano)

La variable así definida recibe el nombre de variable de Rayleigh.

**Función de densidad de la variable aleatoria R.**

Haciendo uso de la función de densidad de la variable aleatoria Ji-cuadrado de Helmert (1875) se deduce, de forma inmediata, la función de densidad de la variable aleatoria de Rayleigh de la siguiente manera,

$$F_R(r)=P\left(R\le r\right)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le r\right)=P\left(X^2+Y^2\le r^2\right)=$$

$$=P\left(\frac{\theta^2}{2}\left[\left(\frac{X}{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}\right)^2+\left(\frac{Y}{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}\right)^2\right]\le r^2\right)=P\left(\frac{\theta^2}{2}\chi_2^2\le r^2\right)=$$

$$=P\left(\chi_2^2\le\frac{2r^2}{\theta^2}\right)=F_{\chi_2^2}\left(\frac{2r^2}{\theta^2}\right)$$

Por tanto,

$$F_R(r)=F_{\chi_2^2}\left(\frac{2r^2}{\theta^2}\right)$$

Haciendo en primer lugar, una simple derivación y, en segundo lugar una sustitución de valores se concluye que, la función de densidad de la variable aleatoria R es:

$$f_R(r;\theta)=\frac{2}{\theta^2}\,r\,e^{-\frac{r^2}{\theta^2}}\;1_{[0,+\infty[}(r)$$

Es fácil observar que:

*a*) *La variable aleatoria* $S=R^2$ *sigue la ley de Weibull*

$$S\hookrightarrow W\left(0,\theta^2,1\right)\;,(\theta\varepsilon R_+^*)$$

*b*) *La variable de Rayleigh es un caso particular de la ley de Weibull a tres parámetros, en donde:*

$$\gamma=0\;\;y\;\;\delta=2.$$

## VII. CALCULO DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA Y DE LA VARIANZA DE VARIABLES ALEATORIAS TRUNCADAS

Para el cálculo de las esperanzas matemáticas y varianzas de las variables aleatorias truncadas, utilizamos la fórmula general de los momentos respecto al origen de orden k(k≥1).

Dado que, las integrales que hay que resolver para la deducción de la esperanza matemática y varianza de las variables aleatorias truncadas, no presenta ninguna dificultad —puesto que, los cambios de variables a realizar son los tradicionales— omitimos sus resoluciones dando sólo los resultados finales salvo para la distribución de Rayleigh cuyos cambios no son tan conocidos.

## VII.1. Truncamiento de la distribución de Cauchy (Ley de Cauchy)

Entre las variables que ya hemos mencionado, la única que tiene interés teorico es la de **Cauchy.**

Esta variable aleatoria —como ya hemos mencionado— no tiene esperanza matemática ni varianza, si está definida en todo su soporte de definición. Por consiguiente, es imprescidible proceder al truncamiento a la izquierda y a la derecha para que esta variable tenga esperanza matemática y varianza. El resultado de la esperanza matemática y de la varianza, cuando el truncamiento es simétrico respecto al origen, se contempla en (19).

Adaptando la fórmula general de los momentos, respecto al origen de orden k≥1 a la variable aleatoria V truncada a la izquierda y a la derecha, obtenemos el siguiente resultado,

$$E\left(V^K \mid v_I \leq V \leq v_D\right) = \int_{v_I}^{v_D} v^k \frac{1}{\left[Arc\,tg\left(\frac{v_D - \theta}{\lambda}\right) - Arc\,tg\left(\frac{v_I - \theta}{\lambda}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{v - \theta}{\lambda}\right)^2\right]} dv$$

**Cálculo del momento respecto al origen de orden 1 y del momento central de orden 2.**

**Cálculo del momento respecto al origen de orden 1.**

La esperanza matemática de la variable V truncada a la izquierda y a la derecha presenta la siguiente forma,

$$E\left(V \mid v_I \leq V \leq v_D\right) = \theta + \lambda \frac{\log_e\left(v_I, v_D\right)}{\mathrm{Arc}\, tg\left(v_I, v_D\right)}$$

donde:

es el grado de truncamiento.

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2.

Actuando de la misma manera que con la esperanza matemática, obtenemos el siguiente resultado:

**Observaciones que se desprenden de las formulas obtenidas**

Si la variable aleatoria V sigue una ley de **Cauchy**

$$V \hookrightarrow C\left(0,1\right)$$

y además se verifica que:

llegamos a los siguientes resultados:

Nota: Estos resultados, bajo otra nomenclatura están registrados sin demostración en (20).

## VII.2. Variables aleatorias continuas de interés práctico

Entre las variables aleatorias continuas de interés práctico, consideraremoslas más representativas en el **control estadístico de la calidad**.Todas estas variables, como ya hemos mencionado, poseen esperanza matemática y varianza.

VII.2.1. *Laplace-Gauss(Normal) truncada a la izquierda en $x_I$:*

$$\{\, X \,|\, X \geq x_I \,\}$$

Adaptando la fórmula general de los momentos, respecto al origen de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_I$, obtenemos el siguiente resultado, La esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_I$ presenta la siguiente forma, para k=1

$$E\left(X \mid X \geq x_I\right) = \mu + \sigma^2 f_X^*\left(x, x_I; \mu, \sigma\right)$$

donde:

$$f_X^*\left(x, x_I; \mu, \sigma\right) = \frac{f_X\left(x, x_I; \mu, \sigma\right)}{1 - F_{LG(0,1)} \dfrac{x_I - \mu}{\sigma}} \quad (x \geq x_I)$$

donde el denominador el el grado de truncamiento

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y orden 2.

Actuando de la misma manera que con la esperanza matemática, obtenemos el siguiente resultado:

VII.2.2. *Laplace-Gauss (Normal) truncada a la derecha en $x_D$*

Trabajando de igual modo que en el otro truncamiento:

En consecuencia:

La esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la derecha presenta la siguiente forma,

$$E\left(X \mid X \leq x_D\right) = \mu - \sigma^2 f_X^*\left(x, x_D; \mu, \sigma\right)$$

donde:

$$f_X^*\left(x, x_D; \mu, \sigma\right) = \frac{f_X\left(x, x_D; \mu, \sigma\right)}{F_{LG(0,1)} \dfrac{x_D - \mu}{\sigma}} \quad (x \leq x_D) \text{ y}$$

Actuando de la misma manera que con la esperanza matemática, obtenemos el siguiente resultado:

VII.2.3. *Laplace-Gauss(Normal) truncada a la izquierda y a la derecha en $x_I$ y $x_D$, respectivamente*

Para el truncamiento bilateral, tenemos que para k> 1:

de modo que, la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda y a la derecha presenta la siguiente forma,

$$E\left(X \mid x_I \le X \le x_D\right) = \mu + \sigma^2 f^*_X\left(x, x_I, x_D; \mu, \sigma\right)$$

donde:

$$f^*_X\left(x, x_I, x_D; \mu, \sigma\right) = \frac{f_X\left(x, x_I; \mu, \sigma\right) - f_X\left(x, x_D; \mu, \sigma\right)}{F_{LG(0,1)}\left(\frac{x_D - \mu}{\sigma}\right) - F_{LG(0,1)}\left(\frac{x_I - \mu}{\sigma}\right)} \quad (x_I \le x \le x_D)$$

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2.

Actuando de la misma manera que con la esperanza matemática, obtenemos el siguiente resultado:

donde:

## VII.3. Variable aleatoria: log-Laplace-Gauss(log-Normal) truncada

Tan sólo vamos a calcular la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria L truncada a la derecha en lD.

### VII.3.1. *log-Laplace-Gauss truncada a la derecha en* $l_D$

Adaptando la fórmula general de los momentos, respecto al origen de orden k(k≥1) a la variable aleatoria L truncada a la derecha, obtenemos el siguiente resultado,

**Cálculo del momento respecto al origen de orden 1 y del momento central de orden 2.**

**Cálculo del momento respecto al origen de orden 1**

La esperanza matemática de la variable aleatoria L truncada a la derecha presenta la siguiente forma,

$$E\left(L \mid L \leq l_D\right) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \quad \frac{F_{LG(0,1)}(d-\sigma)}{F_{LG(0,1)}(d)}$$

donde,

Para la varianza actuando de la misma menera que en los casos anteriores

$$V\left(L \mid L \leq l_D\right) = \frac{e^{2\mu+\sigma^2}}{F_{LG(0,1)}(d)} \quad e^{\sigma^2} F_{LG(0,1)}(d-2\sigma) - \frac{\left[F_{LG(0,1)}(d-\sigma)\right]^2}{F_{LG(0,1)}(d)}$$

## VII.4. Variable aleatoria: log-Laplace-Gauss (log-Normal) generalizada

Tan sólo vamos a calcular la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria G truncada a la derecha en $g_D$.

### VII.4.1. *log-Laplace-Gauss generalizada(log-Normal generalizada) truncada a la derecha en $g_D$*

Adaptando la fórmula general de los momentos, respecto al origen de orden k(k≥1) a la variable aleatoria G truncada a la derecha, obtenemos el siguiente resultado,

$$E\left(G^k \mid G \le g_D\right) = \int_{g_o}^{g_D} g^k \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log_e(g-g_o)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{F_{LG(0,1)}\left(\frac{\log_e(g_D-g_o)-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{2\pi}\,\sigma(g-g_o)}\,dg$$

**Cálculo del momento respecto al origen de orden 1 y del momento central de orden 2.**

La esperanza matemática de la variable aleatoria G truncada a la derecha en $g_D$ presenta la siguiente forma,

$\{G \mid G \le g_D\}$

$$E\left(G \mid G \le g_D\right) = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} F_{LG(0,1)}(t-\sigma)}{F_{LG(0,1)}(t)} + g_o$$

$$V\left(G \mid G \le g_D\right) = 2g_o e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(F_{LG(0,1)}(t-\sigma)-1\right) + e^{2(\mu+\sigma^2)} F_{LG(0,1)}(t-2\sigma) - \frac{e^{-\sigma^2}}{F_{LG(0,1)}(t)}$$

donde:

$$t = \frac{\log_e(g_D-g_o)-\mu}{\sigma}$$

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2.

$$V\left(G \mid G \le g_D\right) = E\left(G^2 \mid G \le g_D\right) - \left[E\left(G \mid G \le g_D\right)\right]^2$$

con lo que,

## VII.5. Variable aleatoria: Weibull con un parámetro

### VII.5.1. *Weibull con un parámetro truncada a la izquierda en $x_I$*

Dado que, se contempla de forma rigurosa en (19), la demostración de la esperanza matemática y varianza de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_I$, nos limitaremos a exponer dichos resultados:

Esto es así, ya que el truncamiento es ente caso, es una traslación de la variable aleatoria.

### VII.5.2. *Weibull con un parámetro truncada a la derecha en $x_D$*

$$\{X \mid X \leq x_D\}$$

Adaptando la fórmula general de los momentos, respecto al origen de orden k(k≥1) a la variable aleatoria X truncada a la derecha en $x_D$, obtenemos los siguientes resultados,

Para k=1, la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la derecha en $x_D$ presenta la siguiente forma,

$$E\left(X \mid X \leq x_D\right) = \theta - \frac{x_D\, e^{-\frac{x_D}{\theta}}}{1 - e^{-\frac{x_D}{\theta}}}$$

y la varianza

VII.5.3. *Weibull con un parámetro truncada a la izquierda y a la derecha en $x_I$ y $x_D$, respectivamente*

Adaptando la fórmula general de los momentos, respecto al origen de orden k(k≥1) a la variable aleatoria X truncada a la izquierda y a la derecha, obtenemos el siguiente resultado,

La esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda y a la derecha presenta la siguiente forma (para k=1)

$$E\left(X \mid x_I \leq X \leq x_D\right) = \frac{x_I\, e^{-\frac{x_I}{\theta}} - x_D\, e^{-\frac{x_D}{\theta}}}{e^{-\frac{x_I}{\theta}} - e^{-\frac{x_D}{\theta}}} + \theta$$

mientras que la varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2.

$$V\left(X \mid x_I \leq X \leq x_D\right) = E\left(X^2 \mid x_I \leq X \leq x_D\right) - \left[E\left(X \mid x_I \leq X \leq x_D\right)\right]^2$$

Actuando de la misma manera que con la esperanza matemática, obtenemos el siguiente resultado,

## VII.6. Variable aleatoria: Weibull con un parámetro

Esta variable es conocida con el nombre de Rayleigh.

VII.6.1. *Rayleigh truncada a la izquierda en $x_I$*

El momento ordinario de orden k (k≥1) es:

Dado que, la integral que hay que resolver para la deducción de la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en xI, presenta cierta dificultad de cálculo —en el sentido que no es tan trivial como las otras— procederemos a su deducción de la forma más simplificada posible.

$$E\left(X \mid X \geq x_I\right) = \int_{x_I}^{+\infty} x \frac{2x\, e^{-\frac{1}{\theta^2}(x^2 - x_I^2)}}{\theta^2} dx = \frac{2\, e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2}}{\theta^2} \int_{x_I}^{+\infty} x^2\, e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{2\, e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2}}{\theta^2} \lim_{A \to +\infty} \int_{x_I}^{A} x\, x\, e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{2\, e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2}}{\theta^2} \left[ -\frac{\theta^2}{2} \lim_{A \to +\infty} \left( A\, e^{-\left(\frac{A}{\theta}\right)^2} - x_I\, e^{-\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \right) + \frac{\theta^2}{2} \lim_{A \to +\infty} \left( \int_{x_I}^{A} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2} dx \right) \right] =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \lim_{A \to +\infty} \int_{x_I}^{A} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2} dx =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \lim_{A \to +\infty} \sqrt{2\pi} \int_{x_I}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2} dx =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{2\pi} \lim_{A \to +\infty} \frac{\theta}{\sqrt{2}} \int_{x_I}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \frac{\theta}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}\right)^2} dx =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{2\pi}\, \frac{\theta}{\sqrt{2}} \lim_{A \to +\infty} \int_{x_I}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \frac{\theta}{\sqrt{2}}} e^{-\left(\frac{x}{\frac{\theta}{\sqrt{2}}}\right)^2} dx =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{2\pi}\, \frac{\theta}{\sqrt{2}} \lim_{A \to +\infty} \left[ F_{LG\left(0, \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)}(A) - F_{LG\left(0, \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)}(x_I) \right] =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{2\pi}\, \frac{\theta}{\sqrt{2}}\; 1 - F_{LG\left(0,\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)}\left(x_I\right) =$$

$$= x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{\pi}\,\theta\; 1 - F_{LG(0,1)}\; \frac{\sqrt{2}\, x_I}{\theta}$$

Por consiguiente,

$$E\left(X \mid X \geq x_I\right) = x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{\pi}\,\theta\; 1 - F_{LG(0,1)}\; \frac{\sqrt{2}\, x_I}{\theta}$$

**Cálculo del momento central de orden 2**

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2.

Dado que, la integral que hay que resolver para calcular el momento respecto al origen de orden 2, no presenta ninguna dificultad ya que, los cambios de variables que hay que hacer son los tradicionales, omitimos su resolución dando el resultado final,

$$V\left(X \mid X \geq x_I\right) = E\left(X^2 \mid X \geq x_I\right) - E\left(X \mid X \geq x_I\right)^2$$

$$E\left(X^2 \mid X \geq x_I\right) = x_I^2 + \theta^2$$

$$\left\{X \mid X \leq x_D\right\}$$

$$E\left(X^k \mid X \leq x_D\right) = \int_0^{x_D} x^k \frac{2\,x\, e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2}}{\theta^2\; 1 - e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}}\, dx$$

Sustituyendo el momento respecto al origen de orden 1 y de orden 2 en la fórmula de la varianza, obtenemos —sin dificultad— el resultado final de la varianza de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_I$,

$$V\left(X \mid X \geq x_I\right) = \theta^2 - e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{\pi}\theta\; 1 - F_{LG(0,1)}\; \frac{\sqrt{2}\, x_I}{\theta} \quad 2 x_I + e^{\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} \sqrt{\pi}\theta\; 1 - F_{LG(0,1)}\; \frac{\sqrt{2}\, x_I}{\theta}$$

VII.6.2. *Rayleigh truncada a la derecha en $x_D$*

En este caso,

### Cálculo de la esperanza matemática

Dado que, el cálculo de la integral que hay que resolver para la deducción de la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la derecha en $x_D$, presenta una gran similitud en los cambios de variables y en la forma de resolverla que la de la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_I$, para no ser reiterativos, omitimos su resolución dando el resultado final,

$$E\left(X \mid X \leq x_D\right) = \frac{\theta\sqrt{\pi}\left(F_{LG(0,1)}\left(\frac{\sqrt{2}\,x_D}{\theta}\right) - \frac{1}{2}\right) - x_D\, e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}}$$

### Cálculo del momento central de orden 2

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2

$$V\left(X \mid X \leq x_D\right) = E\left(X^2 \mid X \leq x_D\right) - \left[E\left(X \mid X \leq x_D\right)\right]^2$$

Dado que, la integral que hay que resolver para calcular el momento respecto al origen de orden 2, presenta una gran similitud en los cambios de variables y la forma de resolverla que la del momento central de orden 1, para no resultar reiterativos, omitimos su resolución dando ya, el resultado final de la varianza,

VII.6.3. *Rayleigh truncada a la izquierda y a la derecha en $x_I$ y $x_D$, respectivamente.*

$$\{X \mid x_I \leq X \leq x_D\}$$

En este caso,

**Cálculo del momento respecto al origen de orden 1**

Dado que la integral que hay que resolver para la deducción de la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_I$ y a la derecha en $x_D$ presenta gran similitud en los cambios de variables y en la forma de resolverla que las ya mencionadas, para no resultar reiterativos omitimos su resolución dando el resultado final,

$$E\left(X \mid x_I \le X \le x_D\right) = \frac{f_X^*(x_I, x_D) + \theta\sqrt{\pi}\, F_{LG(0,1)}^*(x_I, x_D)}{e^{-\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}}$$

donde,

$$f_X^*(x_I, x_D) = x_I\, e^{-\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} - x_D\, e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}$$

$$F_{LG(0,1)}^*(x_I, x_D) = F_{LG(0,1)}\left(\frac{\sqrt{2}\, x_D}{\theta}\right) - F_{LG(0,1)}\left(\frac{\sqrt{2}\, x_I}{\theta}\right)$$

**Cálculo del momento central de orden 2.**

La varianza la calculamos a partir de los momentos respecto al origen de orden 1 y de orden 2

$$V\left(X \mid x_I \le X \le x_D\right) = E\left(X^2 \mid x_I \le X \le x_D\right) - \left[E\left(X \mid x_I \le X \le x_D\right)\right]^2$$

Dado que, la integral que hay que resolver para calcular el momento respecto al origen de orden 2 presenta una gran similitud en los cambios de variables y en la forma de resolverla que la del momento respecto al origen de orden 1, para no resultar reiterativos, omitimos su resolución dando ya el resultado final de la varianza,

$$V\left(X \mid x_I \le X \le x_D\right) = \theta^2 + \frac{E^*(x_I, x_D)}{e^{-\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}} - \left(\frac{\theta\sqrt{\pi}\, F_{LG(0,1)}^*(x_I, x_D) + f_X^*(x_I, x_D)}{e^{-\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}}\right)^2$$

donde,

$$E^*(x_I, x_D) = x_I^2\, e^{-\left(\frac{x_I}{\theta}\right)^2} - x_D^2\, e^{-\left(\frac{x_D}{\theta}\right)^2}$$

## VIII. EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS TRUNCADAS

Entre las variables aleatorias truncadas que hemos considerado en este artículo, tan sólo vamos a proponer ejercicios de aplicación de la variable de Laplace-Gauss(Normal) de la de **Weibull**

y de la de **Weibull**

A esta variable se la conoce con el nombre de **Rayleigh**.

Finalmente propondremos dos ejercicios, uno de ellos contemplará la Ley de Laplace-Gauss, la Ley Binomial y el Teorema del Límite Central y otro calcularemos la esperanza matemática truncada a la izquierda en xo sin hacer uso de las fórmulas deducidas en este artículo. Mientras que en los tres primeros ejercicios, tan sólo vamos a mostrar en resultado final —ya que las fórmulas para aplicar estan contempladas en el artículo— con el fin de que, el lector pueda constatar que ha aplicado correctamnete la fórmula a utilizar, en cada caso concreto, en los dos últimos, pondremos de manifiesto las fórmulas obtenidas haciendo uso de nuestra nomenclatura y la aplicación de las mismas a un caso concreto.

## VIII.1. Ejercicio de la variable de Laplace-Gauss (Normal) truncada a la izquierda y a la derecha

El peso de los botes producidos en una fábrica de conservas, sigue la Ley de **Laplace-Gauss.** Sabiendo que le 2,5% de los botes son rechazados en el control de pesos, por no alcanzar los 450 grs mínimos requeridos y que otro 4,947%, es rechazado por superar los 550 grs, determinar el peso medio de los botes que pasan el control.

**Solución:**

Sustituyendo los valores de:

en la fórmula que nos permite calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en 450 y a la derecha en 550 obtenemos,

## VIII.2. Ejercicio de la variable de Weibull truncada a la izquierda y a la derecha en $x_I$ y $x_D$, respectivamente

$$X \hookrightarrow W\left(0,10,1\right)$$

Sea X una variable aleatoria que representa el peso de los diskettes producidos en una fábrica. Se sabe, por experiencia, que la función de densidad de esta variable es,

$$f_X(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

1. Sabiendo que en el control de pesos se eliminan los diskettes que tienen un peso inferior a $x_I$ grs y superior a $x_D$ grs, encontrar una fórmula que nos permita calcular el peso medio de los diskettes que pasan el control en función de $x_I$ y $x_D$.

2. Cuál será el peso medio de los diskettes que pasan el control si se adopta la siguiente estrategia para fijar $x_I$ y $x_D$.

**Estrategia**: los valores $x_I$ y $x_D$ que tenemos que elegir, serán el menor y el mayor de una muestra aleatoria simple de tamaño 10, simulada de X a partir de 10 simulaciones de la distribución uniforme: U [0,1].

$$V \hookrightarrow U\left[0,1\right]$$

mediante la siguiente expresión,

$$X = -(10)\log_e(1-U)$$

Los valores extraídos de U son: 0.78961, 0.76086, 0.80548, 0.58518, 0.89898, 0.28269, 0.38618, 0.79982, 0.58962 y 0.69623.

Tómese con dos decimales el menor y el mayor valor de la muestra simulada de X.

Solucción:

Sustituyendo los valores de $x_I$= 3,32 y $x_D$= 22,92, en la fórmula de la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda y a la derecha obtenemos,

$$E\left( X \,|\, 3,32 \le X \le 22,92\right) = 10,1065 \ grs$$

## VIII.3. Ejercicio de la variable de Weibull truncada a la izquierda y a la derecha en $x_I$ y $x_D$, respectivamente

$$X \hookrightarrow W\left(0,2,2\right)$$

Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo (en meses) de funcionamiento de un aparato eléctrico. Se sabe, por experiencia, que la función de densidad de esta variable es,

1. Sabiendo que el control de calidad elimina aquellos que no alcanzan una duración de dos meses y los que superan una duración de cuatro meses, calcular el tiempo medio de funcionamiento de los que pasan el control.

Solucción:

Sustituyendo los valores de $x_I=2$ y $x_D=4$ en la fórmula de la esperanza matemática de la variable aleatoria X truncada a la izquierda y a la derecha en $x_I=2$ y $x_D=4$, respectivamente obtenemos,

$$E\left( X \mid 2 \leq X \leq 4\right) = 3,2782\, meses$$

## VIII.4. Ejercicio de variable aleatoria de Lplace-Gauss truncada a la izquierda en b + variable Binomila + Teorema del Límite Central

Sea X una variable aleatoria que representa la vida (en horas) de ciertos tubos electrónicos. Se sabe, por experiencia, que la función de densidad de la variable aleatoria

$$\{X \mid X > b\}$$

adopta la siguiente forma:

donde : a y b son números positivos.

El aparato de que se trata, contiene n tubos, debiendo estar activos n1<n, de ellos (cualesquiera), como mínimo.

1. Encontrar una expresión que nos permita calcular k(a,b).

2. Encontrar una expresión que nos permita calcular la probabilidad de que un tubo siga funcionando después de h horas.

3. Encontrar una expresión que nos permita calcular la probabilidad de que, después de h horas de servicio, el funcionamiento del aparato no se haya interrumpido.

4. Calcular los tres apartados para el siguiente caso práctico:

a=80.000; b=200; c=100 tubos; n1=65 tubos y h= 250 horas.

Soluciones teóricas:

1. Cálculo de k(a,b)

$$k(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{a}}\,\frac{1}{1 - F_{LG(0,1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\,b\right)}$$

2. Cálculo de la probabilidad de que un tubo siga funcionando después de h horas:

$$P\left(X > h\right) = \frac{1 - F_{LG(0,1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\,h\right)}{1 - F_{LG(0,1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\,b\right)}$$

3. Cálculo de la probabilidad de que, después de h horas, de n tubos, n1 sigan funcionando.

Sea J la variable aleatoria que representa el número de tubos que siguen funcionando después de h horas.

$$J \hookrightarrow B\left(n, p\right)$$

3.1. Cálculo de la probabilidad exacta

$$P\left(n1 \le J \le n\right) = \sum_{j=n1}^{j=n} \binom{n}{n1} p^{n1} q^{n-n1}$$

3.2. Cálculo de la probabilidad aproximada

$$P\left(n1 \le J \le n\right) \cong F_{LG(0,1)}\left(\frac{n - n\,p + 0.5}{\sqrt{n\,p\,q}}\right) - F_{LG(0,1)}\left(\frac{n1 - n\,p - 0.5}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)$$

Soluciones prácticas:

4.1. Cálculo de k(80.000,200)

$$k(80.000, 200) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{80.000}}\,\frac{1}{\left[1 - F_{LG(0,1)}(1)\right]} = 0.012572$$

4.2. Cálculo de P(X > 250)

$$P\left(X > 250\right) = \frac{\left[1 - F_{LG(0,1)}(1.25)\right]}{\left[1 - F_{LG(0,1)}(1)\right]} = \frac{1 - 0.89435}{1 - 0.84134} = \frac{0.10565}{0.15866} = 0.66589$$

4.3.1. Cálculo de la probabilidad exacta

$$P\left(65 \leq J \leq 100\right) = \sum_{j=65}^{j=100} \binom{100}{65} \left(0.66589\right)^{65} \left(0.33411\right)^{35}$$

4.3.2. Cálculo de la probabilidad aproximada

$$P\left(65 \leq J \leq 100\right) \cong 0.67003$$

## VIII.5. Ejercicio de la esperanza matemática de una variable aleatoria truncada a la izquienda en $x_o$

Sea X una variable aleatoria que representa la longitud de una cierta pieza expresada en cms. Se sabe, por experiencia, que la función de densidad de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_o$ es:

$$g_X(x) = k(x_o)\, e^{-(x-1)^2}\, 1_{[x_o,+\infty[}(x) \ \ ,(x_o > 0)$$

1. Encontrar una expresión que nos permita calcular

$$k(x_o) \text{ para que } g_X(x)$$

sea una verdadera función de densidad

2. Encontrar una expresión que nos permita calcular

$$E\left(X \mid X \geq x_o\right)$$

sin hacer uso de las fórmulas contempladas en este artículo.

Resolución:

1.

$$\int_{x_o}^{+\infty} k(x_o)\, e^{-(x-1)^2} dx = 1$$

Cálculo de:

$$\int_{x_o}^{+\infty} e^{-(x-1)^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \int_{x_o}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,(x-1)]^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \lim_{A \to +\infty} \int_{x_o}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,(x-1)]^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \lim_{A \to +\infty} F_{LG\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(A) - F_{LG\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(x_o) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \left(1 - F_{LG(0,1)}[\sqrt{2}\,(x_o - 1)]\right)$$

Por lo tanto,

$$k(x_o) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\left(1 - F_{LG(0,1)}[\sqrt{2}(x_o - 1)]\right)}$$

De lo que se deduce que, la función de densidad de la variable aleatoria X truncada a la izquierda en $x_o$ es:

$$g_X(x) = \frac{1}{\left(1 - F_{LG(0,1)}[\sqrt{2}(x_o - 1)]\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}(x-1)]^2} 1_{[x_0, +\infty[}(x), (x_0 > 0)$$

2. Cálculo de:

$$E(X \mid X \geq x_o) = \frac{1}{\left(1 - F_{LG(0,1)}[\sqrt{2}(x_o - 1)]\right)} \int_{x_o}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}\, x\, e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}(x-1)]^2} dx$$

Por consiguiente, procederemos a calcular la integral contenida en esta expresión haciendo uso de un simple cambio de variable y de las propiedades de la función de distribución y, finalmente susutituiremos el resultado en dicha expresión.

$$\int_{x_o}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}\, x\, e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}(x-1)]^2} dx =$$

$$= \int_{\sqrt{2}(x_o - 1)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx =$$

$$= \int_{\sqrt{2}(x_o-1)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{\sqrt{2}(x_o-1)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left( F_{LG(0,1)}(A) - F_{LG(0,1)}[\sqrt{2}(x_o - 1)] \right) -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \lim_{A \to +\infty} \quad e^{-\frac{A^2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{2}(x_o-1)]^2}$$

De lo que se desprende que:

$$E\left( X \,|\, X \geq x_o \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{f_X \quad x, x_o; 1, \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left( 1 - F_{LG(0,1)}[\sqrt{2}(x_o - 1) \right)}$$

**Conclusiones:** dado que el interés práctico que conlleva el cálculo de las esperanzas matemáticas y de las varianzas de variables aleatorias truncadas en el cálculo del **coeficiente de desigualdad** y en especial en el **control estadístico de la calidad** es evidente y, que no hemos encontrado apenas libros o apuntes de cátedra que desarrolle dicho tema, hemos considerado oportuno realizar una aportación sobre el mismo con nuestra propia nomenclatura. Aunque dicha publicación tan sólo contempla el cálculo de la esperanza matemática y varianza de variables aleatoria truncadas a la izquierda, a la derecha y a la izquierda y a la derecha de un conjunto de variables aleatorias muy restringido consideramos que puede ser una primera aproximación para futuras publicaciones que contengan otras Leyes con diversas aplicaciones.

## BIBLIOGRAFÍA EN ORDEN CRONOLÓGICO DE LIBROS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES UTILIZADOS EN ESTE ARTÍCULO


(1) L Chambadel (1970). Mathématiques. 3.éléments de calcul des probabilités. Deuxième Édition. Dunod.

(2) Yves Lapage.,Marc Moore.,Roc Roy (1975). Introduction à la théorie des probabilités. Les Presses de l»Université du Québec.

(3) Edouard.B.Manoukian (1986). Guide de Statistique Appliquée. Hermann, éditeurs des sciences et des arts. Paris

(4) Nicolas Bouleau (1986). Probabilités de l»ingénieur. Variables aléatoires et simulation. Hermann, Paris.

(5) Christian Leboeuf.,Jean Louis Roque., Jean Guégand (1987). Cours de probabilités et de statistiques. 2 ème édition. Ellipses. Edition marketing. Editeur des preparations grandes écoles medecine. Paris.

(6) Jean Guégand.,Marie-Anne Maingueneau (1987). Exercices de probabilités. Ellipses. Edition Marketing. Editeur des preparations grandes écoles medecine. Paris

(7) Edward J.Dudewicz.,Satya N Mishra (1988). Modern Mathematical Statistics. John Wiley & Sons,Inc.,New York. London.Sydney.